INF-292 OPTIMIZACIÓN

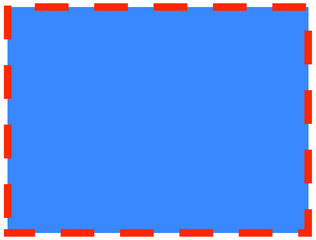
Rodrigo Verschae

Qué aprenderán en este curso

- Entender qué es la optimización
- Modelar problemas reales usando optimización.
- Dominar algoritmos básicos de optimización.

- Familiarizarse con el solvers para resolver varios problemas optimzacion

Introducción a la optimización y modelamiento

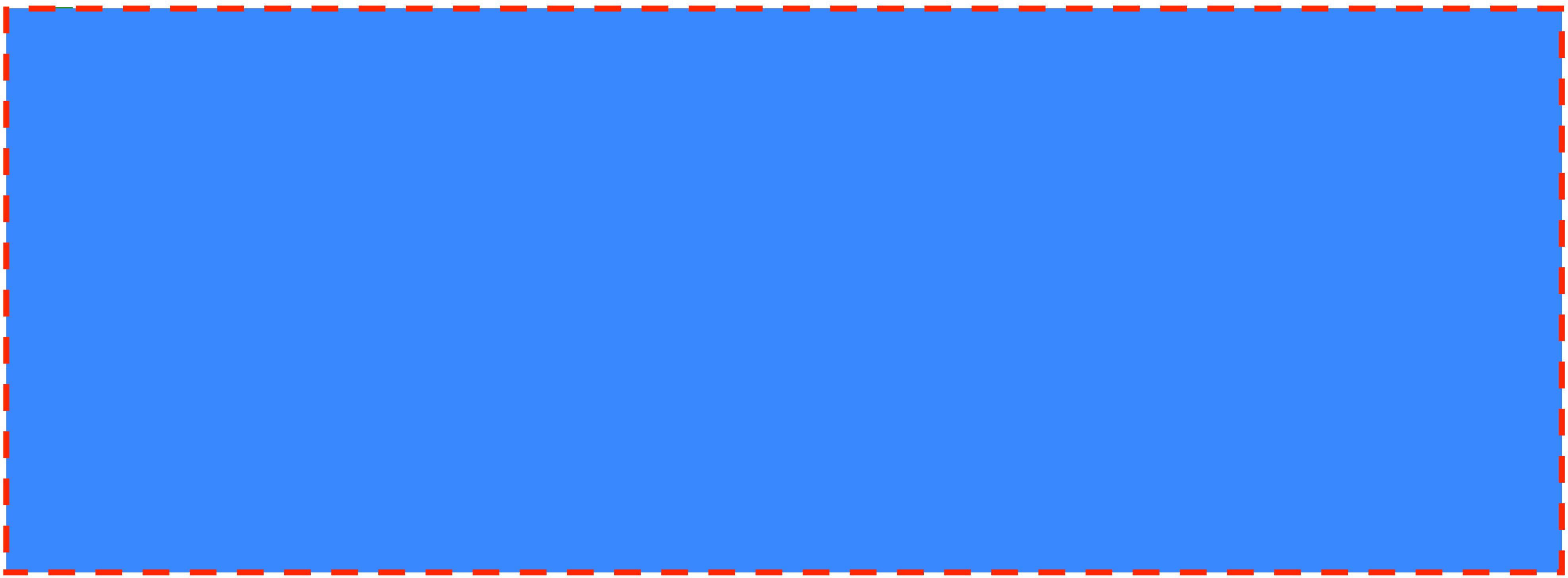


¿Qué significa optimizar?

¿Qué significa optimizar?

Encontrar *la mejor decisión*, dentro de un conjunto de *decisiones posibles*.

A qué nos referimos con “lo mejor” y cuales son las “decisiones posibles” dependerá de la aplicación.



¿Qué significa optimizar?

Encontrar *la mejor decisión*, dentro de un conjunto de *decisiones posibles*.

A qué nos referimos con "lo mejor" y cuales son las "decisiones posibles" dependerá de la aplicación.

Ejemplo

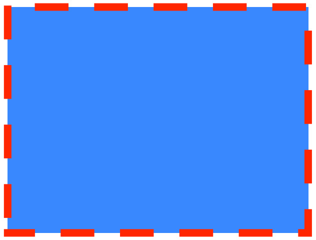
Supongamos que queremos llenar un camión de mudanza con la mayor cantidad de cajas posibles.

¿Cuales son las decisiones posibles?

↳ Maneras de llenar el camión.

¿Qué es "lo mejor"?

↳ Mientras más cajas, mejor



Esquema general

"Mundo Real"

Problema de decisión

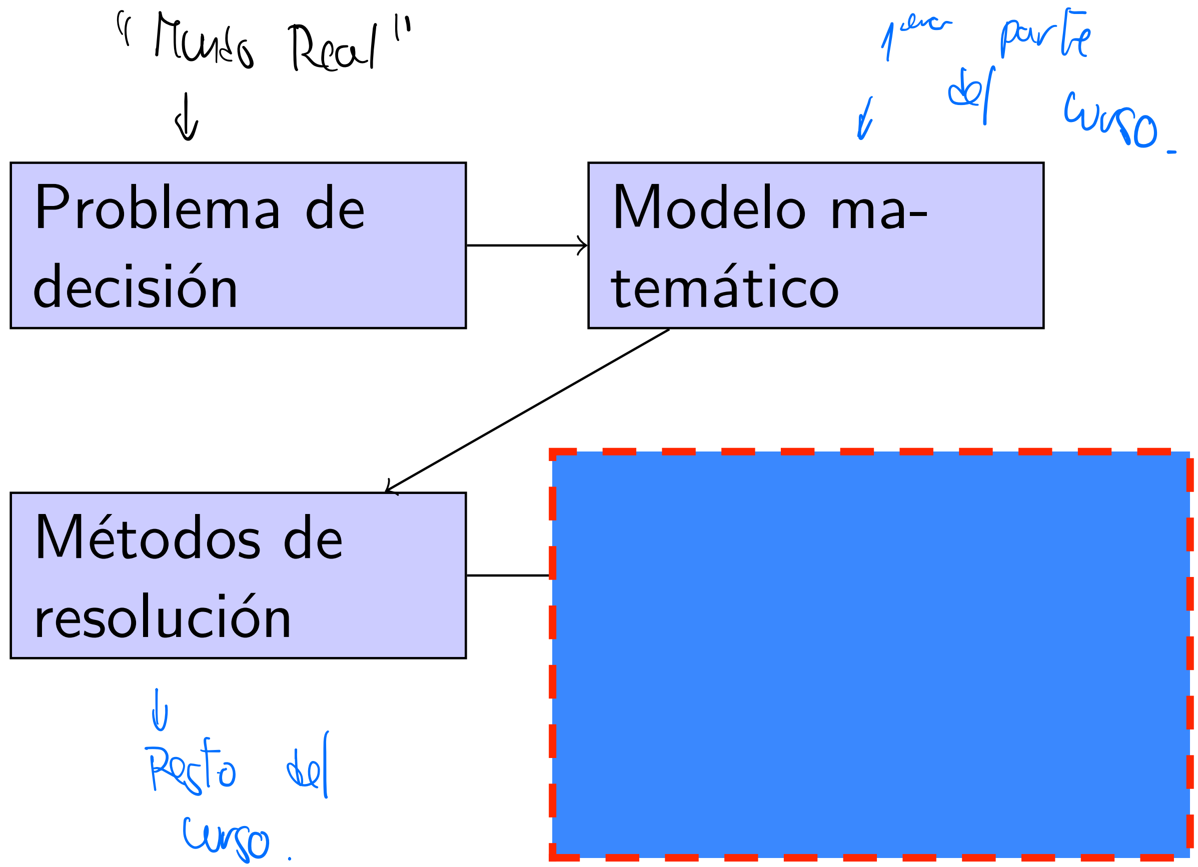
Esquema general

"Mundo Real"

1era parte del curso.

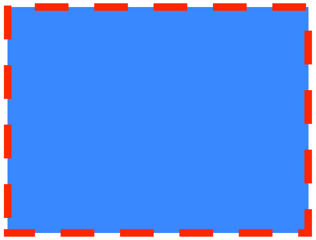
Problema de decisión → Modelo matemático

Esquema general



Algunos ejemplos

- **Minería**. Decidir qué secuencia seguir para excavar una mina, decidir cómo planificar trenes, entre otros.
- **Energía**. Decidir cuánto generar en plantas eléctricas para satisfacer demanda, cómo operar energía almacenada, entre otros.
- **Deporte.** Diseño del torneo de fútbol nacional.
- **Planificación**. Cómo asignar trabajadores (enfermeros/as a turnos, tripulantes a vuelos), trabajos a máquinas, entre otros.



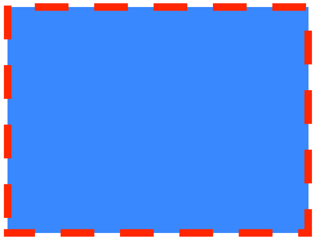
Componentes de un modelo de optimización

Siempre tendremos dos componentes principales: un conjunto de "decisiones posibles" y una medida de "mejor".

Decisión tiene
n dimensiones

Las decisiones están codificadas como un vector variable $x \in \mathbb{R}^n$, y que el conjunto de decisiones posibles es $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

En el ejemplo anterior, x puede representar una manera de llenar el camión y Ω sería el conjunto de *todas* las maneras de llenar el camión.



Decisiones posibles

Ejemplo

Una empresa productora de bombones de chocolate vende sus productos en dos versiones distintas, A y B. La versión A corresponde a una caja con 2 bombones grandes y 4 pequeños, mientras que la versión B va con 3 bombones grandes y 3 pequeños. La empresa cuenta con un total de 18 bombones grandes y 24 pequeños.

¿Podemos producir 10 unidades de A y 0 de B?

Para producir 10 unidades de A:

$2 \cdot 10 = 20$ bombones grandes $>$ 18 disponibles

$4 \cdot 10 = 40$ " pequeños $>$ 24 disponibles

No podemos.

¿Podemos producir 2 unidades de A y 2 de B?

Bomb. pequeños : $\underbrace{4 \cdot 2}_{A} + \underbrace{3 \cdot 2}_{B} = 14 \leq 24$ disponibles

grandes : $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10 \leq 18$ disponibles

Sí es posible.

Describamos todas las maneras posibles que tiene la empresa de empaquetar sus bombones.

x_A : cantidad de caja A a producir

x_B : " " " B a producir

(x_A, x_B) será factible si:

Restricciones

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Bomb. pequeños :} & 4x_A + 3x_B \leq 24 \\ \text{" pequeños :} & 2x_A + 3x_B \leq 18 \\ \text{Naturaleza de variables} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right. & x_A, x_B \geq 0 \\ & x_A, x_B \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

La mejor decisión

Dada una decisión x asumiremos que existe una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que mide qué tan buena es la decisión x. La función f se conoce como *función objetivo*.

Ejemplo

Sigamos con le ejemplo anterior, y supongamos que la empresa de bombones obtiene una utilidad de 8 y 7 unidades con las versiones A y B, respectivamente.

Si producimos (x_A, x_B), la utilidad total es

$$f(x) = 8x_A + 7x_B \quad \Big\} \text{ Función obj.}$$

El problema de optimización (ejemplo)

En palabras: Encontrar producción factible de A y B que maximicen la utilidad.

En notación matemática:

$$\max \quad 8x_A + 7x_B$$

sujeto a:

$$4x_A + 3x_B \leq 24$$

$$2x_A + 3x_B \leq 18$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

$$x_A, x_B \in \mathbb{Z}$$

El problema de optimización

Siempre asumiremos que un problema de optimización tiene la siguiente forma:

$$
\begin{array}{ll}
\min / \max & F(x) \\
\text{sujeto a:} & g_1(x) \leq 0 \\
 & g_2(x) \leq 0 \\
 & \vdots \\
 & g_m(x) \leq 0 \\
 & x \in D \quad \} \text{ Naturaleza de variables}
\end{array}
$$

¿Maximizar o minimizar?

Algunas veces conviene maximizar la función objetivo, otras veces minimizar. Sin embargo, desde un punto de vista matemático, podemos asumir que siempre minimizamos, pues

$$\text{máx}\{f(x) : x \in \Omega\} = -\text{mín}\{-f(x) : x \in \Omega\}.$$

Además, tampoco perdemos generalidad es asumir que las restricciones son siempre $g_i(x) \leq 0$:

Si tengo $g_i(x) \geq 0 \iff -g_i(x) \leq 0$

Si tengo $g_i(x) = 0 \iff \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0 \\ -g_i(x) \leq 0 \end{array}$

Clasificación básica de problemas

Según qué tipo de funciones f y g_i tenemos, y qué tipo de dominio es $\mathcal{D}$, los problemas de optimización tienen distintos nombres.

Con o sin restricciones:

Sin restricciones: $D = \mathbb{R}^n$ y $\overbrace{m=0}^{\text{no hay } g_i(x) \leq 0}$

Con restricciones: de caso contrario.

Lineal o no-lineal:

Lineal: $f(x) = c^T x + d$, $g_i(x) = a_i^T x + b_i$ } Funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineales afín.

$2x_1 + 3x_2 - 5x_5 + 1$

No lineal: de caso contrario: $x_1 \cdot x_2$, $\log(x_1)$, $\vdots$

Clasificación básica de problemas

Contínuo, entero o mixto: En general, trabajaremos con dominios del tipo

algún índice   algunas variables

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_j \geq 0 \quad j \in N,\, x_i \in \mathbb{Z} \quad i \in I\}.$$

- Contínuo : si $I = \phi$
- Entero : si $I = \{1, ..., n\}$ todas enteras
- Mixto : de caso contrario.

Ej: El problema de los bombones es Lineal, con restricciones y entero